第 6 講　円

PART1　円の方程式

例題

(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　中心が点 $(0,\ 1)$ で，点 $(2,\ 3)$ を通る

(ii)　点 $(-3,\ 2)$ を中心とし，x 軸に接する

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか。

Point Pickup

練習

⑴　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　点 $(2,\ -5)$ を中心とし，y 軸に接する

(ii)　2 点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

⑵　方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

第 6 講　PART1 確認問題

1 点 $(4,\ -2)$ を中心とし，x 軸に接する円の方程式を求めよ。

$$\left(x-\boxed{\text{ア}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{イ}}\right)^2=\boxed{\text{ウ}}$$

2 2 点 $(3,\ -2)$，$(5,\ 2)$ を直径の両端とする円の方程式を求めよ。

$$\left(x-\boxed{\text{エ}}\right)^2+y^2=\boxed{\text{オ}}$$

3 方程式 $x^2-4x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

$$k<\boxed{\text{カ}}$$

第 6 講　円

PART1　円の方程式

例題

(1)　次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i)　中心が点 $(0,\ 1)$ で，点 $(2,\ 3)$ を通る

(ii)　点 $(-3,\ 2)$ を中心とし，x 軸に接する

(2)　方程式 $x^2+y^2-6x+10y+16=0$ はどのような図形を表すか。

(1) (i)　半径 r は，中心 $(0,\ 1)$ と点 $(2,\ 3)$ の距離であるから

$$r^2=(2-0)^2+(3-1)^2=2^2+2^2=8$$

よって，求める円の方程式は $x^2+(y-1)^2=8$

(ii)　x 軸に接するから，半径は中心 $(-3,\ 2)$ と x 軸の距離に等しく，2 である。

よって，求める円の方程式は

$$(x+3)^2+(y-2)^2=2^2 \quad すなわち \quad (x+3)^2+(y-2)^2=4$$

(2)　$x^2+y^2-6x+10y+16=0$ より

$$(x-3)^2-9+(y+5)^2-25+16=0$$

$(x-3)^2+(y+5)^2=18$　すなわち　$(x-3)^2+(y+5)^2=(3\sqrt{2})^2$

よって，中心 $(3,\ -5)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円を表す。

練習

(1) 次の条件を満たす円の方程式を求めよ。

(i) 点 $(2,\ -5)$ を中心とし，y 軸に接する

(ii) 2点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を直径の両端とする

(2) 方程式 $x^2+2x+y^2+k=0$ が円を表すとき，定数 k のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)(i) y 軸に接するから，半径は中心 $(2,\ -5)$ と y 軸の距離に等しく，2 である。

よって，求める円の方程式は

$$(x-2)^2+(y+5)^2=2^2 \quad \text{すなわち} \quad (x-2)^2+(y+5)^2=4$$

(ii) 中心は2点 $(-6,\ 2)$，$(4,\ -2)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

$$\left(\frac{-6+4}{2},\ \frac{2-2}{2}\right) \quad \text{すなわち} \quad (-1,\ 0)$$

半径 r は，中心 $(-1,\ 0)$ と点 $(4,\ -2)$ の距離であるから

$$r^2=\{4-(-1)\}^2+(-2-0)^2=29$$

よって，求める円の方程式は $(x+1)^2+y^2=29$

(2) $x^2+2x+y^2+k=0$ より

$$(x+1)^2-1+y^2+k=0 \qquad \text{すなわち} \quad (x+1)^2+y^2=1-k$$

この方程式が円を表すときの条件は，$1-k>0$

したがって，$k<1$

第 6 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：4，イ：2，ウ：4

[解説]

円が x 軸に接することから，半径 r は中心 $(4,\ -2)$ と x 軸の距離に等しく，$r=2$ である。

よって，求める円の方程式は

$$(x-4)^2+(y+2)^2=2^2$$ [A]

すなわち

$$\boldsymbol{(x-4)^2+(y+2)^2=4}$$

[A]　円の方程式
点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
特に，原点を中心とする半径 r の円の方程式は
$x^2+y^2=r^2$

2

[正解] エ：4，オ：5

[解説]

円の中心は２点 $(3,\ -2)$，$(5,\ 2)$ を結ぶ線分の中点であり，その座標は

$$\left(\frac{3+5}{2},\ \frac{-2+2}{2}\right)$$

すなわち

$$(4,\ 0)$$

半径 r は，中心 $(4,\ 0)$ と点 $(3,\ -2)$ の距離であるから

$$r^2=(3-4)^2+(-2-0)^2=(-1)^2+(-2)^2=5$$

よって，求める円の方程式は

$$\boldsymbol{(x-4)^2+y^2=5}$$ [B]

[B]　円の方程式
点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 r の円の方程式は
$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
特に，原点を中心とする半径 r の円の方程式は
$x^2+y^2=r^2$

3 **[正解]** カ：4

[解説]

$x^2-4x+y^2+k=0$ より

$$(x-2)^2-4+y^2+k=0$$

すなわち

$$(x-2)^2+y^2=4-k$$ [C]

この方程式が円を表すときの条件は

$$4-k>0$$

したがって　$\boldsymbol{k<4}$

[C]　方程式 $x^2+y^2+lx+my+n=0$ の表す図形
x，y それぞれについて平方完成し

$$(x-a)^2+(y-b)^2=k$$

の形に変形する。
$k>0$ ならば　中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{k}$ の円を表す。